МЕХАНИКА

Лектор: Жақыпов Әлібек Серікұлы
Тел: +7 705 660 69 63
e-mail: Alibek.Zhakypov@kaznu.edu.kz

4 лекция
«Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси»

Цель лекции: сформировать у студентов понимание динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, роли момента инерции и момента импульса, а также научить применять уравнение динамики вращательного движения и теорему Штейнера для расчета моментов инерции простых тел и составных систем.

Задачи лекции:

1. Рассмотреть выражение момента импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и переход от суммы по элементарным массам к интегралу.
2. Ввести и обосновать понятие момента инерции тела относительно заданной оси и показать его физический смысл как аналога массы при прямолинейном движении.
3. Вывести уравнение динамики вращательного движения и установить связь между моментом сил и угловым ускорением через момент инерции.
4. Научить вычислять моменты инерции простых тел цилиндра и стержня относительно осей симметрии.
5. Изложить и применить теорему Штейнера для перехода от момента инерции относительно оси через центр масс к моменту инерции относительно произвольной параллельной оси.

Основные понятия и термины:

Момент импульса при вращении вокруг оси – векторная характеристика вращательного движения, равная сумме моментов импульсов всех элементарных масс тела относительно выбранной оси.

Момент инерции тела относительно оси – скалярная величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояния от оси вращения до этих масс.

Теорема Штейнера — утверждение, согласно которому момент инерции тела относительно произвольной оси, параллельной оси через центр масс, равен сумме момента инерции относительно оси через центр масс и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

План лекции

1 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент импульса тела, разбиение на элементарные массы.

2 Определение момента инерции тела относительно оси. Аддитивность момента инерции и переход к интегралу.

3 Уравнение динамики вращательного движения. Аналогия между моментом инерции и массой.

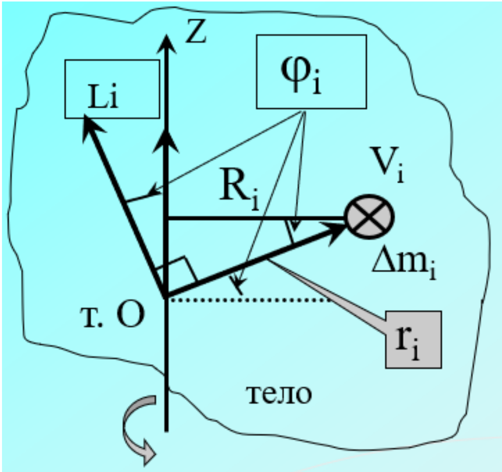
4 Примеры вычисления момента инерции. Сплошной цилиндр, стержень относительно перпендикулярной оси через центр масс.

5 Теорема Штейнера. Вывод формулы и применение для расчета момента инерции относительно произвольной параллельной оси.

6 Таблица моментов инерции некоторых простых тел и использование справочных значений при решении задач.

«Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси»

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг оси Z, с угловой скоростью w. Разобьем это тело на маленькие массы Dm_i и запишем, чему равен момент импульса:



$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i] = \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i] \quad (4.1)$$

Полный момент импульса:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \, [\vec{r}_i \times \vec{v}_i] \quad (4.2)$$

Момент инерции

Величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояний от оси вращения до этих масс называется <u>моментом инерции</u> тела относительно этой оси.

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \cdot R_i^2 \quad (4.3)$$

момент инерции (скаляр).

Момент инерции аналог массы при прямолинейном движении.

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (4.4)$$

Мы знаем, что:$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ тогда

$$\frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} \quad (4.5)$$

$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}$ - уравнение динамики вращательного движения

По определению момент инерции величина аддитивная:

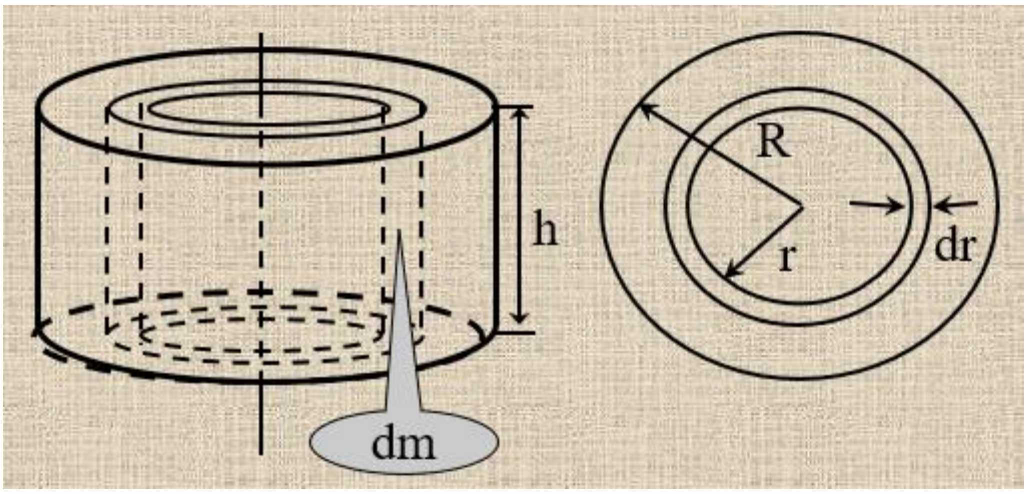
$$J = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \cdot R_i^2 = \Delta m_1 \cdot R_i^2 + \Delta m_2 \cdot R_2^2 + \cdots + \Delta m_n \cdot R_n^2 = J_1 + J_2 + \cdots + J_n \quad (4.6)$$

Т.е. тело можно разбивать на части и считать отдельно для них J.
В общем случае:

$$J = \int_0^M \rho \cdot R^2 dV = \{\rho = const\} = \rho \cdot \int_0^M R^2 dV \quad (4.7)$$

Вычислить интеграл вида $\int R^2 dV$ для тел произвольной формы сложно, но можно для простых симметричных фигур.

Моменты инерции некоторых простых тел
Пример № 1: Момент инерции цилиндра



R – внешний радиус; r – текущий радиус; dr – толщина слоя; dm – масса слоя

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot \rho \cdot dV = r^2 \cdot \rho 2\pi r \cdot h \cdot dr = 2\pi\rho h \cdot r^3 dr \quad (4.8)$$

$$J = \int dJ = \int_0^R 2\pi\rho h \cdot r^3 dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\, dr = 2\pi\rho h \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \quad (4.9)$$

$$J = 2\pi\rho h \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2}\rho h \cdot \pi R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot h S_{\text{осн.}} \cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot V \cdot R^2 = \frac{1}{2} M R^2 \quad (4.10)$$

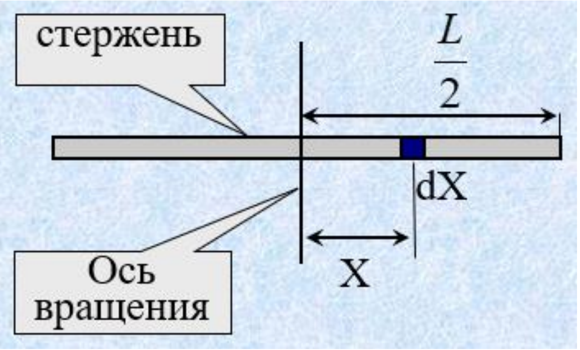
Итого, момент инерции цилиндра равен:

$$J = \frac{1}{2} M R^2 \quad (4.11)$$

Где : M – масса цилиндра, R – радиус цилиндра.

Пример № 2: Момент инерции стержня

Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину.



По определению: $J = \int_0^M R^2 dm$

Для нашего случая вычислим J для половины стержня:

$$J_{1/2} = \int_0^M x^2\, dm = \int_o^V x^2 \rho dV = \int_0^{L/2} x^2 \cdot \rho \cdot S dx = \rho \cdot S \cdot \int_0^{L/2} x^2 dx = \rho \cdot S \cdot \frac{x^3}{3} \Big\{ {L/2 \atop 0} = \frac{1}{3} \rho \cdot S \cdot \left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - 0 \right] \quad (4.12)$$

$$J_{1/2} = \frac{1}{24} \rho \cdot S \cdot L \cdot L^2 = \frac{1}{24} \rho \cdot V \cdot L^2 = \frac{1}{24} m \cdot L^2 \quad (4.13)$$

Итак, для половины стержня момент инерции равен:

$$J_{1/2} = \frac{1}{24} m \cdot L^2 \quad (4.14)$$

Тогда для всего стержня имеем:

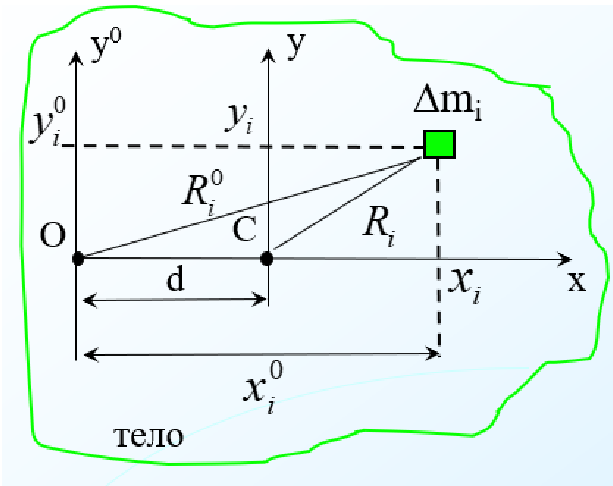
$$J = 2 \cdot J_{1/2} = 2 \cdot \frac{1}{24} m \cdot L^2 = \frac{1}{12} m \cdot L^2 \quad (4.15)$$

Итого, момент инерции стержня относительно перпендикулярной оси, проходящей через его центр масс равен:

$$J = \frac{1}{12} m \cdot L^2 \quad (4.16)$$

Теорема Штейнера-Гюйгенса

Рассмотрим произвольное тело. Выберем две параллельные оси вращения. Одна из которых (ось С) проходит через центр масс тела, вторая отстоит от первой на расстояние d (ось О).



$$x_i^0 = x_i + d$$
$$y_i^0 = y_i$$

Оси O и C ⊥ рисунку.

Найдем J относительно оси O:

$$J = \sum_i (R_i^o)^2 \cdot \Delta m_i = \sum_i \left[(x_i^o)^2 (y_i^0)^2\right] \cdot \Delta m_i$$

$$\sum_i \left[(x_i^0)^2 + (y_i^0)^2\right] \cdot \Delta m_i = \sum_i \left[(x_i + d)^2 + y_i^2\right] \cdot \Delta m_i = \sum_i [x_i^2 + 2 \cdot d \cdot x_i + d^2 + y_i^2] \cdot \Delta m_i = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \cdot \Delta m_i + 2 \cdot d \sum_i x_i \cdot \Delta m_i + d^2 \sum_i R_i \cdot m_i = \sum_i R_i^2 \cdot \Delta m_i + 0 + M_{\text{полная}} \cdot d^2 \quad (4.17)$$

Заметим, что: $\sum_i (x_i^2 + y_i^2) \cdot \Delta m_i = \sum_i R_i \cdot \Delta m_i$

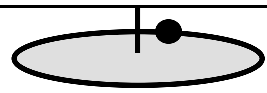
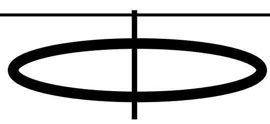
$\sum_i \Delta m_i = M_{\text{полная}}$ $\quad \sum_i x_i \cdot \Delta m_i = X_{\text{центрмассе}} \cdot m = 0$

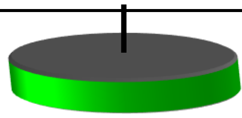
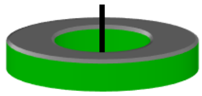
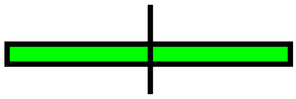
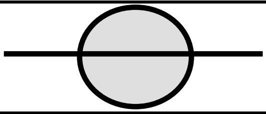
Теорема Штейнера

$$J = J_{\text{центрмассе}} + M_{\text{тела}} d^2 \quad (4.18)$$

Теорема Штейнера :

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Фигура	Ось вращения	Рисунок	Момент инерц
Мат. точка	На расст. R		$J = mR^2$
Обруч	В центре ⊥ пл.		$J = mR^2$

Труба	Через центр		$J = mR^2$
Диск	- « - » -		$J = \frac{1}{2}mR^2$
Толст. труба	- « - » -		$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$
Стержень	- « - » -		$J = \frac{1}{12}mR^2$
Стержень	Через край		$J = \frac{1}{3}mR^2$
Шар	Через центр		$J = \frac{2}{5}mR^2$

Контрольные вопросы

1. Как определяется момент инерции тела относительно оси вращения и в чем заключается его физический смысл при сравнении различных тел

2. Сформулируй уравнение динамики вращательного движения и объясни, какую роль в нем играют момент сил и момент инерции

3. Как по определению вычисляется момент инерции сплошного цилиндра относительно оси симметрии какие элементы и интеграл при этом используются

4. Сформулируй теорему Штейнера и поясни, как она позволяет перейти от момента инерции относительно оси через центр масс к моменту инерции относительно произвольной параллельной оси

5. Как изменится момент инерции тела при увеличении расстояния между осью через центр масс и новой параллельной осью и с чем это связано с точки зрения распределения массы

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.

2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.

3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.

4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.

5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980

6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т. 1.